

# לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 7 - שובך היונים

תוכן העניינים

1. שובך היונים ..... 1

## שובך היונים

## שאלות

- (1) תהי  $A = \{1, 2, 3, \dots, 49\}$ . הוכיחו כי לכל בחירה של קבוצה  $B \subseteq A$ , כך ש- $|B| = 26$ , יהיו ב- $B$  לפחות שני איברים שסכומם 49.
- (2) תהי  $A$  קבוצה של שישה מספרים מתוך  $\{1, \dots, 11\}$ . הוכיחו כי קיימות שתי תתי קבוצות של  $A$  שסכום אבריהן שווה.
- (3) מה הגודל המירבי של קבוצה של מספרים טבעיים, שבה אין שני מספרים שסכומם או הפרשם מתחלק ב-3009? נמקו.
- (4) תהי  $A$  קבוצה של  $n$  מספרים טבעיים כלשהם. הוכיחו שקיימת קבוצה חלקית לא-ריקה של  $A$ , שסכום איבריה מתחלק ב- $n$ .
- (5) הוכיחו כי בכל צביעה של המישור בשני צבעים, כחול ואדום, יש שתי נקודות שמרחקן אחד והן צבועות באותו צבע.
- (6) יהי  $n \in \mathbb{N}$ . הוכיחו כי קיים  $k \in \mathbb{N}$ , כך שבמס' הטבעי  $k \cdot n$  מופיעות הספרות 7 ו-0 בלבד.
- (7) הוכיחו כי מבין כל 12 מספרים דו-ספרתיים יש שניים שהפרשם בעל שתי ספרות זהות.
- (8) הוכיחו כי מבין כל בחירת 26 נקודות בתוך משולש שווה צלעות, שאורך צלעו הוא אחד, יש שתי נקודות שהמרחק ביניהן קטן מ- $\frac{1}{5}$ .
- (9) הוכיחו כי בכל בחירה של  $n+1$  מספרים מתוך הקבוצה  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ , יש שני מספרים  $x, y$  כך ש:
  - א.  $x, y$  זרים (כלומר, המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1).
  - ב.  $x$  מתחלק ב- $y$  ללא שארית.
  - ג. הראו כי החסם הנ"ל הדוק, כלומר אפשר לבחור  $n$  מספרים מבלי שיתקיימו תנאים א ו-ב.

- (10) נבחר 46 מספרים מתוך הקבוצה  $\{1, 2, 3, \dots, 81\}$ . הוכיחו כי יש שני מספרים שהפרשם הוא בדיוק 9. הוכיחו גם כי המספר הנ"ל הדוק (כלומר מצאו 45 מספרים מתוך  $\{1, 2, 3, \dots, 81\}$ , שאין בהם שניים שהפרשם הוא בדיוק 9).
- (11) תהי A קבוצה בת 20 מספרים מתוך הסדרה החשבונית  $1, 4, 7, 10, \dots, 100$ . הוכיחו כי יש שני מספרים שסכומם 104.
- (12)  $n$  אנשים נפגשו במסיבה ולחצו ידיים. הוכיחו כי יש שני אנשים שלחצו בדיוק אותו מספר ידיים.
- (13) הוכיחו כי בכל צביעה של קשתות הגרף השלם  $K_6$  בשני צבעים, יש משולש מונוכרומטי.
- (14) הוכיחו כי בכל גרף יש שני קודקודים בעלי אותה דרגה.
- (15) לפוליטיקאי נותרו 50 ימים עד לבחירות, והוא מתכנן נאומי בחירות: לפחות אחד ביום אך לא יותר מ-75 נאומים בסך הכל. הוכיחו כי קיימת סדרת ימים שבהם הוא נואם 24 נאומים.
- (16) יהי  $n \in \mathbb{N}$ . הוכיחו כי קיים  $m \in \mathbb{N}$ , כך ש- $n$  מחלק את  $2^m - 1$ . הדרכה: התבוננו בסדרה  $2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots, 2^{n+1} - 1$ .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)